

## Química Quântica

### Lista de Exercícios

#### Nota

Muitos dos exercícios que envolvem cálculos, gráficos, integrações, etc. Fique à vontade para usar a fantástica ferramenta disponível em [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com).

#### Fundamentos Históricos

1. Na mecânica ondulatória clássica (como no caso do som, das ondas de água, etc) é possível gerar ondas de qualquer frequência com qualquer energia. Por exemplo, é possível gerar um som muito agudo (alta frequência) porém muito pouco intenso (pouca energia). O que muda nesta descrição com a introdução da condição de energia de Planck,  $E = h\nu$ ?
2. Após polarizar a luz em uma determinada direção, digamos,  $z$ , podemos fazer o seguinte experimento: Primeiro, podemos passar esse feixe de luz por um polarizador orientado na própria direção  $z$ , e observaríamos que o feixe passa inalterado, confirmando que todos os fótons têm a mesma polarização. Em seguida, podemos passar esse mesmo feixe por um polarizador orientado a  $45^\circ$  em relação ao eixo  $z$ . Observaremos que apenas 50% dos fótons passam (a intensidade do feixe diminui em 50%). Mas se todos os fótons eram iguais, por que uns passaram e outros não? Ao aceitar a existência dos fótons e ao atribuir uma polarização para cada fóton, temos como escapar de uma interpretação puramente probabilística para este experimento?
3. Quando átomos de prata são bombardeados através de um campo magnético não-uniforme, ocorre a separação do feixe em dois grupos (experimento de Stern-Gerlach). Descreva o experimento de Stern-Gerlach sequencial, em que o campo magnético não uniforme é usado para separar o feixe em diferentes orientações espaciais. Explique o resultado do experimento com base no princípio de incerteza aplicado às componentes de spin (assuma, simplesmente, que o princípio se aplica nesse caso - o que é verdade).
4. Na mecânica ondulatória clássica, a energia de uma onda é proporcional ao quadrado de sua amplitude. É possível conhecer a energia de uma onda clássica apenas com uma foto da onda?
5. Na mecânica quântica, para conhecer a energia de uma onda eletromagnética, você precisa conhecer sua frequência, de acordo com a relação de Planck. Imagine que você "tirou uma foto" de uma onda eletromagnética em um determinado instante (isto é, mediu sua intensidade em função da posição). Você veria algo parecido com uma função periódica, um seno, digamos. Apenas com essa foto, é possível determinar a energia da onda?
6. Uma foto é uma medida instantânea da amplitude em função da posição. Se, como esperado, você percebeu que a energia da onda quântica não pode ser determinada apenas com uma foto (porque ela nada diz da frequência da onda), discuta como fazer um experimento que permita determinar essa energia. Se uma foto não é suficiente, um filme é? A qualidade da medida da energia da onda, agora, depende do tempo desse filme?
7. Use a análise anterior para entender como a relação de Planck leva a uma das formulações do princípio de incerteza, associada a medidas de energia e tempo,  $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$ .
8. Relembre o experimento do efeito fotoelétrico e suas principais implicações, no que se refere a: 1) a existência de partículas de luz, 2) à densidade dessas partículas de luz no espaço.

## Equação de Schroedinger (primeira abordagem)

9. A equação de uma onda clássica, unidimensional, é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

em que  $u = u(x, t)$  é a equação da onda, como função da posição e do tempo. Mostre que  $u(x, t) = A \cos(\omega t) \sin(kx)$  é uma solução da equação.

10. Entenda o significado de  $\omega$  e  $k$ . E que  $\omega$  pode ser escrito como  $2\pi\nu$ , onde  $\nu$  é a frequência da onda, e que  $k = 2\pi/\lambda$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda.
11. Mostre que  $v = \omega/k$ , e que pode ser interpretado como uma medida da velocidade da onda.
12. Desenhe como a amplitude da onda varia com a coordenada  $x$ , para um tempo fixo.
13. Desenhe como a amplitude da onda varia com o tempo, em uma posição do espaço.
14. Use a solução geral com separação de variáveis,  $\Psi(x, t) = \psi(x)f(t)$  na equação do exercício 9 mostre que podemos obter uma equação apenas para a parte espacial, com a forma

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi(x) = 0$$

15. Procure, agora efetivamente, resolver a equação do exercício 9. Para isso, use o método da separação de variáveis, como o usado no exercício 14, e encontre soluções para a parte espacial e para a parte temporal separadamente.
16. Mostre que na mecânica clássica o momento de uma partícula pode ser calculado por  $p = \sqrt{2m[E - V(x)]}$ , onde  $E$  é a energia total e  $V(x)$  é a energia potencial da partícula como função da posição.
17. Usando o resultado do exercício anterior e a proposta de De Broglie para o comprimento de onda de uma partícula, obtenha a equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

que corresponde à parte espacial da equação de Schroedinger unidimensional.

## Entendendo a equação de Schroedinger

18. Imagine uma partícula confinada em um poço de potencial. O potencial é nulo no intervalo  $0 \leq x \leq a$  e muito alto (infinitamente alto) em  $x < 0$  e em  $x > a$ . A partícula, portanto, não pode ser encontrada fora do intervalo. Uma solução da equação da questão 17 para este problema é

$$\psi(x) = C \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right), 0 \leq x \leq a$$

$$\psi(x) = 0, x < 0, x > a$$

onde  $C$  é uma constante qualquer. Mostre que no interior do poço, a função satisfaz a equação, e determine o valor de energia correspondente. (Fora do poço a equação é trivialmente satisfeita por  $\psi(x) = 0$  para todo  $x$ .)

19. Resolva, agora efetivamente, a equação diferencial da questão 17, obtendo todas as soluções possíveis, e suas energias, no caso da partícula na caixa.

20. Desenhe as funções  $\psi(x)$  no intervalo  $0 < x < a$  para as oito soluções de menor energia.
21. Desenhe a função  $\psi(x)$  no intervalo  $0 < x < a$  para a solução que tem a centésima energia, contando da menor para a maior.
22. Desenhe a função  $\psi(x)$  no intervalo  $0 < x < a$  para a solução que tem a milésima energia, contando da menor para a maior.
23. Desenhe um diagrama de níveis de energia indique a energia relativa das soluções de menor energia que você obteve. Discuta como varia a energia das transições entre níveis de energia consecutivos de acordo com estes níveis de energia.
24. Agora vamos olhar a equação de Schroedinger como um problema de autovalores. Relembremos do que se trata isto. Considere a seguinte equação

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

onde o vetor  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  e o número real  $\lambda$  são desconhecidos.

- (a) Mostre que o vetor  $\vec{c} = (1, 0)$  é solução da equação acima para  $\lambda_c = 2$ .
- (b) Mostre que todos os vetores múltiplos de  $\vec{c}$  também são soluções da equação, para o mesmo valor de  $\lambda_c$ .
- (c) Mostre que o vetor  $\vec{d} = (0, 1)$  também é uma solução da equação, que todos os múltiplos de  $\vec{d}$  também são soluções, e que indique qual é o valor de  $\lambda_d$  correspondente.
- (d) Mostre que  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$  não são múltiplos um do outro. Ainda mais, mostre que são ortogonais.
- (e) Mostre que todos os múltiplos de  $\vec{c}$  são ortogonais a todos os múltiplos de  $\vec{d}$ .

Chamemos de  $A$  a matriz  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . O vetor  $\vec{c}$  e todos os seus múltiplos são chamados de *autovetores* da matriz  $A$ , *associados* ao *autovalor*  $\lambda_c$ . O vetor  $\vec{d}$  e todos seus múltiplos são chamados de autovetores da matriz  $A$  associados ao autovalor  $\lambda_b$ .

25. Quais são os autovetores e autovalores da matriz  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ? Mostre que os autovetores associados aos autovalores diferentes são ortogonais.
26. Quais são os autovetores e autovalores da matriz  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ? Mostre que os autovetores associados aos autovalores diferentes são ortogonais.
27. Todas as matrizes simétricas tem autovalores reais, e autovetores associados a autovalores diferentes ortogonais. Será que você consegue demonstrar isso para a matriz genérica  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ ?
28. A equação da questão 17 também é uma equação de autovalores, que tem propriedades muito parecidas às que você demonstrou nos itens anteriores. Por exemplo, tome as soluções da equação que você obteve na questão 19. A cada solução corresponde um valor de energia diferente. As soluções correspondem aos autovetores da equação de Schroedinger, que como são funções (não vetores), são chamadas *autofunções*. A cada autofunção corresponde uma energia, que são os *autovalores* da equação de Schroedinger.

- (a) Mostre que todos os múltiplos das soluções que você encontrou também são soluções da equação (na verdade, você já deve ter percebido isso ao tentar resolver a equação).
- (b) Mostre que se você escolher duas soluções distintas (associadas a diferentes energias) quaisquer, essas soluções são ortogonais. Duas funções (reais) são ditas ortogonais se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx = 0$$

Dica: procure quanto vale a integral indefinida  $\int \text{sen}(ax) \text{sen}(bx)dx$ .

29. A equação de Schroedinger para o oscilador harmônico é, de acordo com a equação do exercício 17,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{kx^2}{2} \psi(x) = E\psi(x)$$

onde  $m$  é a massa da partícula e  $k$  é a constante de força do oscilador, portanto,  $kx^2/2$  é sua energia potencial. Uma solução de menor energia desta equação é

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2}$$

onde  $\alpha = \sqrt{(km/\hbar^2)}$ .

- (a) Mostre que  $\psi_0(x)$  é uma solução da equação.
- (b) Mostre que a energia associada a  $\psi_0(x)$  é  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$
- (c) Mostre que qualquer múltiplo de  $\psi_0(x)$  é também uma solução da equação associada ao mesmo valor de energia.
30. A operação

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

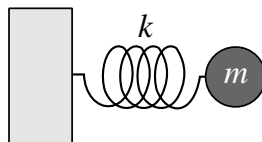
é chamada de “operador” energia total, ou *Hamiltoniano* do sistema. Motre que este é um *operador linear*, isto é, que se  $a$  e  $b$  são constantes,

$$H(af(x) + bg(x)) = aHf(x) + bHg(x).$$

31. Imagine que um sistema pode ser escrito como a soma de duas autofunções do operador, ou seja,  $\psi(x) = f(x) + g(x)$ , com  $Hf(x) = E_f f(x)$  e  $Hg(x) = E_g g(x)$ . O estado  $\psi(x)$  é uma autofunção de  $H$  associada à soma das energias de  $f(x)$  e  $g(x)$ ?

### Valores médios esperados e probabilidade

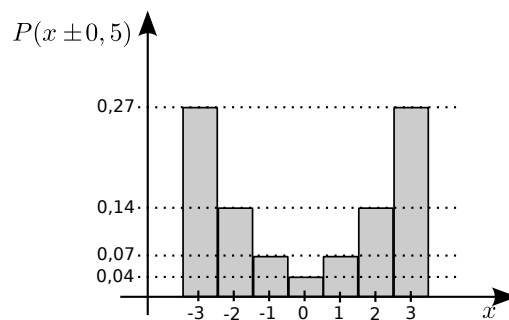
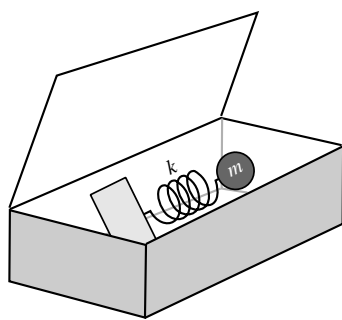
32. Imagine um oscilador harmônico clássico, isto é, uma massa presa a uma mola, como ilustrado na figura abaixo.



A constante de força da mola é  $k$  e a massa do objeto é  $m$ . A mola é ideal, não há atrito, e a massa da mola é desprezível. Considere que a posição da massa tem origem,  $x = 0$ , quando a mola está totalmente relaxada.

- (a) Qual a energia total da mola se a *velocidade* do objeto quando *ele passa pela origem* é  $1 \text{ ms}^{-1}$ ?
- (b) Qual a energia total da mola se  $k = 1,0 \text{ Jm}^{-2}$  e a distensão máxima da mola é de  $1 \text{ m}$ ? Para responder esta pergunta, você usa alguma informação sobre a velocidade da mola?
- (c) O princípio de incerteza diz que você não pode conhecer, com precisão absoluta, a posição e o momento de uma partícula. Em vista deste fato, a energia total de um oscilador harmônico quântico poderia ser calculada a partir das informações dos exercícios anteriores? As perguntas anteriores poderiam ser formuladas, da mesma forma, para um oscilador harmônico quântico?

33. A medida da energia potencial média de um oscilador harmônico clássico pode ser obtida com o seguinte experimento: Coloque o oscilador dentro de uma caixa (como mostra a figura abaixo). Abra a caixa rapidamente e anote a posição ( $x$ ) da massa. Faça isso muitas vezes e construa um histograma que indique a probabilidade de encontrar o oscilador em um intervalo  $x \pm \Delta x$  em função de  $x$ . Suponha que alguém fez este experimento e obteve o histograma abaixo:



Sabendo que a constante de força do oscilador é  $k = 1 \text{ Jm}^{-2}$ , calcule a energia potencial média do oscilador, de acordo com o histograma (as distâncias estão em metros).

O mesmo experimento poderia ser feito para um oscilador harmônico quântico, já que você *pode* medir a posição da partícula com a precisão que quiser. Talvez a sua medida destruísse o oscilador cada vez, e você precisasse recomeçar o experimento com outro oscilador idêntico ao inicial mas, de todas formas, o mesmo histograma poderia ser construído e você poderia calcular a energia potencial média.

34. Há duas situações distintas na mecânica quântica no que se refere à medida de uma propriedade. Uma é aquela em que a função que descreve o sistema é uma *autofunção* do operador associado àquela propriedade, outra é aquela em que não é. Você mostrou, no exercício 29, que a solução de menor energia é uma autofunção do operador Hamiltoniano, associado a um valor de energia preciso,  $E_0$ . Mostre que esta mesma função não é uma autofunção nem do operador de energia cinética, nem do operador energia potencial.
35. Uma das observações do efeito fotoelétrico (veja o exercício 8) é que a corrente, quando é observada (quando a frequência da radiação é maior que a frequência mínima), é proporcional à intensidade da radiação. Na interpretação corpuscular da luz, Einstein sugeriu que a intensidade da radiação corresponde à densidade de fótons por volume. Imagine que há um único fóton, e que o volume total em que esse fóton pode estar está dividido em dois. Mostre que a densidade de probabilidade de encontrar o fóton em cada metade é equivalente ao número de fótons por unidade volume. Estenda o raciocínio dividindo o espaço em cada vez mais elementos de volume, para entender que a densidade de fótons por volume é o mesmo que a densidade de probabilidade de encontrar fótons por volume, no caso de um único fóton.

36. Mostre, usando o mesmo raciocínio do exercício anterior, que a densidade numérica de fótons por unidade de volume, quando há mais de um fóton, é igual à soma das densidades de probabilidades de encontrar cada fóton em cada volume.
37. A densidade de probabilidade de encontrar um fóton em cada região do espaço é, de acordo com os dois exercícios anteriores, proporcional à densidade de fótons por volume. Esta, por sua vez, é proporcional à intensidade da luz, ou seja, ao quadrado da amplitude da onda eletromagnética. Por analogia, a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula (como um elétron) em cada região do espaço, deve ser proporcional ao quadrado da amplitude da onda que descreve a partícula na formulação de Schroedinger da mecânica quântica. Qual é a *probabilidade* de encontrar uma partícula em um elemento de volume  $dV$  se a amplitude da onda que descreve a partícula é  $\psi(x)$ ?
38. Se  $\psi(x)$  é a amplitude da onda que descreve a partícula na caixa, qual o valor médio da energia potencial da partícula? Você já sabe o resultado, mas escreva a fórmula que corresponde ao cálculo, usando a densidade de probabilidade.
39. Se  $\psi(x)$  é a amplitude da onda que descreve o oscilador harmônico quântico, na sua solução de menor energia (aquela descrita no exercício 29), escreva a equação integral que permite calcular a energia potencial média do oscilador. Resolva esta integral (como quiser) e mostre que a energia potencial média do oscilador corresponde à metade da energia total.
40. Nos dois casos acima, a aplicação do operador (“energia potencial”) correspondia apenas ao produto da fórmula que fornece a energia potencial pela densidade de probabilidade. Em muitos casos isso não é tão simples. Por exemplo, o operador “energia cinética” corresponde a derivar a função duas vezes. Vamos entender o que fazer nestes casos. No lugar da função de onda, voltemos aos vetores. Imagine que nosso sistema é descrito pelo vetor  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ , e que o “operador” que deve ser aplicado para calcular a propriedade de interesse é uma matriz,  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Ou seja, se  $\vec{x}$  fosse um autovetor da matriz  $A$ , teríamos  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ , e  $\lambda$  seria o valor da propriedade (ver exercício 24). Agora  $\vec{x}$  não é um autovetor de  $A$ . Reveja quais são os autovalores de  $A$ , ou seja, quais seriam os valores da propriedade observada se o sistemas fosse descrito por autovetores de  $A$ .
- (a) Se interpretamos  $x_1^2$  como a probabilidade de obter o valor da propriedade dada por um dos autovalores, e  $x_2^2$  como a probabilidade de obter a propriedade associada ao outro autovalor, que conta nos daria a média?
- (b) Mostre que a conta acima corresponde à seguinte operação:
- $$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
- (c) A conta acima pode ser separada em duas partes: primeiro, aplicamos o operador  $A$  no vetor  $\vec{x}$ . O resultado é um vetor. Qual? Em seguida, fazemos o produto interno do vetor  $\vec{x}$  com o vetor resultante da conta anterior.
- (d) A interpretação do quadrado das componentes do vetor  $\vec{x}$  como probabilidades (como no item 40a) implica uma condição sobre as componentes do vetor. Qual?
- (e) Mostre que a condição acima é uma condição sobre o produto interno do vetor com ele mesmo,  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ .
- (f) Mostre que se  $\vec{x}$  for um autovetor de  $A$ , a média do item 40b corresponde ao valor do autovalor associado a  $\vec{x}$ .

41. As propriedades dos operadores que representam propriedades na mecânica quântica são muito parecidas às propriedades das matrizes diagonais, como a do exercício anterior, e quase sempre as analogias entre as duas são corretas. Façamos essa analogia.

- (a) Se o quadrado de cada componente do vetor é uma densidade de probabilidade, vimos que a soma desses quadrados tem que ser unitária. Qual a propriedade das funções de onda que corresponde a essa propriedade do vetor?
- (b) O cálculo do valor médio da propriedade, no caso vetorial, consiste em aplicar o operador (a matriz) no vetor e, em seguida, multiplicar (fazer o produto interno) do próprio vetor com o resultado desta primeira operação. No caso das funções, faremos o mesmo: primeiro, apliquemos o operador que corresponde à propriedade na função e, em seguida, multiplicaremos a função pelo resultado desta primeira operação:

$$\int_{\tau} \psi(x) A \psi(x) dx$$

Agora, no entanto,  $\psi(x)$  é uma função contínua, e o resultado que era uma soma sobre componentes, se torna uma integral, que é feita sobre todo o espaço (o símbolo  $\tau$  indica isso). Reveja os exercícios 38 e 39 e confirme que não haveria nenhum problema em interpretá-los desta forma.

- (c) Calcule a energia cinética da partícula na caixa, para a solução de menor energia, usando a fórmula acima (ver exercício 18). Atenção: neste caso, a função é uma autofunção do operador. Compare o resultado com a discussão do item 40f.
- (d) Agora, no entanto, podemos calcular o valor médio de propriedades que não são autofunções do operador. Calcule o valor médio da energia cinética da solução de menor energia do oscilador harmônico (exercício 29). Mostre que ela corresponde à metade da energia total do oscilador. Compare com o resultado do item 39 e discuta a consistência deste resultado.
- (e) Suponha que uma função de onda qualquer pode ser escrita como a combinação linear de duas outras funções,

$$\psi(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$

e que  $f(x)$  e  $g(x)$  são autofunção do operador que representa a propriedade que estamos estudando. Mostre que  $c_1^2$  e  $c_2^2$  podem ser interpretados como a probabilidade de observar o valor associado ao autovalor de cada uma das funções (contanto que  $c_1^2 + c_2^2 = 1$ ).

42. Calcule o valor médio do momento da partícula na caixa, para a solução de menor energia. Lembre-se que o operador momento é  $-i\hbar \frac{d}{dx}$ .
43. Calcule o valor médio da posição da partícula na caixa, para a solução de menor energia. Será necessário normalizar a função de onda para obter o resultado.
44. Calcule o valor médio do momento para qualquer solução do problema da partícula na caixa em uma dimensão (colocando o resultado em função do número quântico correspondente). O que acontece com o valor médio do momento à medida que a energia aumenta?
45. Calcule o valor médio do momento de um oscilador harmônico, na solução de menor energia (exercício 29).
46. Calcule o valor médio da posição da partícula de um oscilador harmônico, na solução de menor energia (exercício 29).

## Resolvendo a equação de Schroedinger

47. A equação de Schroedinger, em uma dimensão, é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

Mostre que se  $V(x, t)$  não é explicitamente dependente do tempo, ou seja, se  $V(x, t) = V(x)$ , a equação pode ser separada em duas equações, uma dependente do tempo, outra da coordenada espacial.

48. A parte temporal da equação de Schroedinger, quando o potencial não é explicitamente dependente do tempo, tem a forma (como você deve ter mostrado no exercício anterior):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(t) = E f(t)$$

Resolva esta equação e mostre que a energia,  $E$ , do sistema, está associada à frequência de oscilação de acordo com a relação de Planck ( $E = h\nu$ ).

49. Em três dimensões, a parte espacial da equação de Schroedinger é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}) + V(\vec{x}) \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x}).$$

Mostre que esta equação pode ser separada em três equações independentes, uma para cada variável espacial, se o potencial puder ser escrito como a soma de três termos, cada um dependente de uma só variável, ou seja, se  $V(\vec{x}) = V_x(x) + V_y(y) + V_z(z)$ . Para isso, como é habitual, a solução  $\psi(\vec{x})$  deve ser escrita como um produto das soluções para cada variável.

50. No caso acima, temos que o operador Hamiltoniano pode ser escrito como uma soma de três operadores, cada um atuando sobre uma variável,  $H = H_x + H_y + H_z$ . Antes de nada, confirme que entendeu isso. A solução está sendo escrita como um produto de funções, cada uma dependente de uma variável, ou seja,  $\psi(\vec{x}) = f(x)g(y)h(z)$ . Mostre que, se  $f(x)$ ,  $g(y)$  e  $h(z)$  são soluções das equações associadas aos operadores da variável correspondente (por exemplo, se  $H_x f(x) = E_x f(x)$ ), a energia de  $\psi(\vec{x})$  é a soma das energias das três funções.

51. No caso da partícula na caixa,  $V(\vec{x}) = 0$  dentro da caixa, portanto a condição do exercício anterior é trivialmente satisfeita para  $V_x = V_y = V_z = 0$ . Resolva, portanto, uma das equações do item 49, assumindo que a caixa está definida no intervalo  $[0, a]$  para a variável de escolha.

52. Mostre quais são as possíveis energias que uma partícula na caixa tri-dimensional pode ter. O estado fundamental (de menor energia) é degenerado? E os outros? O que acontece, qualitativamente, com a degenerescência, à medida que a energia aumenta?

## Oscilador Harmônico e Rotor Rígido

53. Como deve ser o aspecto aproximado da curva de energia potencial de uma molécula diatômica, em função da distância entre os átomos? Justifique os aspectos principais da curva.

54. A curva que você desenhou no item anterior deve ser parecida a um potencial de Morse,

$$V(r) = D \left[ 1 - e^{-a(r-r_e)} \right]^2,$$

onde  $D$  e  $a$  são constantes, e  $r_e$  é a distância de menor energia. Faça o gráfico do potencial de Morse e confirme que ele corresponde a sua imagem qualitativa do potencial de interação entre dois átomos em uma molécula diatômica.



55. Calcule a aproximação de Taylor de segunda ordem do potencial de Morse em  $r = r_e$ . Esta é uma aproximação quadrática, portanto, harmônica. Mostre que a constante de força deste potencial harmônico depende das constantes  $a$  e  $D$  do potencial de Morse segundo  $k = 2Da^2$ .
56. Faça um gráfico (usando alguma ferramenta computacional, como o Wolfram), da diferença do potencial de Morse para o potencial harmônico que você calculou. Para isso, invente valores para as constantes. Onde o potencial harmônico é uma boa aproximação do potencial de Morse?
57. Escreva as equações de movimento clássicas de duas partículas ligadas por um potencial harmônico. Mostre que essas duas equações podem ser reduzidas a uma única equação na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{\mu}x$$

onde  $x$  é a posição relativa das partículas e  $\mu$  é a massa reduzida.

58. Resolva a equação do item anterior. Mostre que o período da oscilação é  $2\pi\sqrt{\mu/k}$ . Escreva as equações da frequência e da frequência angular do oscilador.
59. Mostre que, se  $x = x_2 - x_1$ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}f(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}f(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

60. A equação de Schroedinger independente do tempo para um sistema de duas partículas sujeitas a um potencial harmônico é

$$-\frac{\hbar}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Psi(x_1, x_2) - \frac{\hbar}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Psi(x_1, x_2) + \frac{k(r - r_0)^2}{2} \Psi(x_1, x_2) = E\Psi(x_1, x_2)$$

onde  $r = x_2 - x_1$ ,  $r_0$  é a distância de menor energia potencial e  $k$  é a constante de força do oscilador. Mostre que, assim como no caso clássico, esta equação pode ser reduzida a uma equação de uma única variável  $x = r - r_0$ .

61. Compre o livro "Introduction to Quantum Mechanics" de Linus Pauling e E. Bright Wilson Jr., da editora Dover, que é barato e fica bonito na sua biblioteca. Leia as páginas 67 a 73 do livro e entenda a ideia de como se resolve a equação de Schroedinger para o oscilador harmônico. Descreva com palavras e desenhos a ideia geral da resolução.
62. A fórmula geral das soluções da equação de Schroedinger para o oscilador harmônico é

$$\Psi_v(x) = N_v H_v(\alpha^{1/2}x) e^{-\alpha x^2/2}, v = 0, 1, 2, \dots$$

onde  $\alpha = \sqrt{k\mu/\hbar^2}$ ,  $N_v = (1/\sqrt{2^v v!})(\alpha/\pi)^{1/4}$  e  $H_v$  são os polinômios de Hermite (encontre seu significado no seu novo livro). Mostre que as soluções para  $v = 0$ ,  $v = 1$  e  $v = 2$  são normalizadas, isto é que a probabilidade de encontrar qualquer distância do oscilador é unitária nos três casos (use as ferramentas que quiser para fazer as integrais).

63. Mostre que as  $\Psi_v(x)$  descritas no exercício anterior são efetivamente soluções da equação de Schroedinger do oscilador harmônico, para  $v = 0$ ,  $v = 1$  e  $v = 2$ . No processo, descubra a energia de cada uma destas soluções.
64. Desenhe as 5 soluções de menor energia do oscilador harmônico quântico. Desenhe o quadrado destas soluções, que corresponde à densidade de probabilidade de encontrar o oscilador com cada distância. Discuta quais são as distâncias mais prováveis em cada caso, e como isto se correlaciona com: a) a intuição de que as energias menores devem ser mais prováveis; b) com o gráfico da probabilidade de encontrar o oscilador harmônico clássico com cada distância, do exercício 33.

65. As energias do oscilador harmônico quântico são dadas por

$$E_v = \hbar \left( \frac{k}{\mu} \right)^{1/2} \left( v + \frac{1}{2} \right)$$

Faça um diagrama de níveis de energia. Calcule a diferença de energia de dois níveis de energia consecutivos. Discuta como deve ser um espectro de absorção de radiação de um oscilador harmônico quântico de acordo com esta aproximação.

66. O comprimento médio da ligação de hidrogênio é de 74 pm, e transição vibracional de menor energia é de 12 kcal mol<sup>-1</sup>. Mostre qual a probabilidade de que a ligação H–H sofra uma distensão de até 10% de seu valor médio. Faça o mesmo para 20% e 30%. Desenhe a molécula com essas diferentes distensões, na mesma escala. A ligação covalente na molécula de hidrogênio é rígida?

67. Repita o exercício anterior para as moléculas de Oxigênio, Nitrogênio, Cloro e Iodo.

68. Um rotor rígido é formado por duas massas de 10 g e 3 g, separadas por 10 cm por uma haste de massa desprezível. Sua frequência de rotação é 10 Hz e ele não está sujeito a forças externas.

(a) Qual a velocidade linear de cada massa?

(b) Qual a velocidade angular do rotor?

(c) Qual a energia cinética do rotor? Calcule usando as velocidades lineares calculadas em (a).

(d) Qual o momento de inércia do rotor?

(e) Mostre que a energia cinética pode ser escrita em função do momento de inércia e da velocidade angular.

(f) Mostre que o momento de inércia pode ser escrito em função da massa reduzida e da distância entre as massas.

(g) Calcule o a energia cinética do rotor usando a velocidade angular e o momento de inércia.

(h) Mostre que a equação da energia cinética do rotor em função do momento de inércia e da velocidade angular é similar em forma à equação de uma partícula livre. Com essa analogia, defina o momento angular do rotor.

69. Defina a Hamiltoniana quântica do rotor rígido em coordenadas cartesianas. Por que ela é igual à Hamiltoniana de um sistema de duas partículas não-interagentes? Qual é a diferença?

70. Usando o resultado do exercício anterior, mostre que a Hamiltoniana do rotor rígido pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

em que  $\vec{x} = (x, y, z)$  é a diferença de posição das duas partículas do rotor e  $\mu$  é a massa reduzida.

71. Removido.

72. O Laplaciano em coordenadas esféricas é

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

Mostre que, no caso do rotor rígido quântico, a Hamiltoniana em coordenadas esféricas é, portanto,

$$H = \frac{-\hbar^2}{2I} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right].$$

Escreva, assim, a equação de Schroedinger para o rotor rígido. Faça explícitas as variáveis da função de onda.

73. A solução de menor energia do rotor rígido é constante. Mostre que a normalização adequada da função resulta em:

$$Y(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

Qual a energia cinética do rotor rígido nesta solução?

74. Se a solução de menor energia do rotor rígido tem energia nula, as partículas estão paradas. Isto é consistente com o conhecimento da posição dessas mesmas partículas, de acordo com  $Y(\theta, \phi)$  do exercício anterior?
75. Desenhe a densidade de probabilidade de encontrar um ângulo  $\theta$  em função de  $\theta$ , para a solução de menor energia do rotor rígido.
76. Desenhe a densidade de probabilidade de encontrar um ângulo  $\phi$  em função de  $\theta$ , para a solução de menor energia do rotor rígido.
77. Se você escolher um intervalo de ângulos  $\phi \pm \Delta\phi$ , pode calcular a probabilidade de encontrar o rotor rígido com  $\phi$  nesse intervalo. Sem fazer contas, apenas analisando os gráficos dos exercícios anteriores, qual a conta que deve corresponder à probabilidade de encontrar o ângulo em um determinado intervalo?
78. A função  $Y$  do exercício 73 é uma autofunção da equação de Schroedinger correspondente? Associada a que autovalor? Verifique.
79. A segunda função de menor energia do rotor rígido é

$$Y(\theta, \phi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta.$$

Mostre que esta função é uma autofunção da equação de Schroedinger correspondente, e encontre a energia associada.

80. Desenhe a densidade de probabilidade de encontrar o rotor rígido com um ângulo  $\theta$  em função de  $\theta$  para a função de onda do exercício anterior. Faça o mesmo para  $\phi$ .
81. As energias das soluções da equação de Schroedinger para o rotor rígido são dadas pela equação

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1), J = 0, 1, 2, \dots$$

Faça um diagrama de níveis de energia. Calcule a diferença de energia de dois níveis de energia consecutivos.

82. Se, experimentalmente, só forem observadas transições rotacionais entre níveis de energia consecutivos (o que é aproximadamente verdade), como será o espectro de absorção rotacional de uma molécula diatômica?
83. Usando os mesmos dados que você usou nos exercícios 66 e 67, calcule as frequências de rotação das moléculas dos exemplos, e a energia das transições rotacionais. Em que faixa de energias (ultravioleta, visível, infra-vermelho, etc.) estas energias se encontram? Os choques entre moléculas na temperatura ambiente ( $kT \sim 0,59 \text{ kcal mol}^{-1}$ ) podem provocar excitações rotacionais?

## Átomo de Hidrogênio

84. Escreva a equação de Schroedinger para o átomo de hidrogênio, em coordenadas cartesianas.

85. O Laplaciano, em coordenadas esféricas, é

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Mostre que a equação de Schroedinger é separável em sua parte radial e em sua parte angular, se usarmos  $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ .

86. A parte angular da equação de Schroedinger do átomo de Hidrogênio, que você deve ter obtido no exercício anterior, deve ter a forma

$$- \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] = \beta Y$$

onde  $\beta$  é a constante definida pela igualdade entre a parte radial e a parte angular. Mostre que esta equação pode ser novamente separada, em suas componentes dependentes de  $\theta$  e  $\phi$ , se usarmos  $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ .

87. A dependência em  $\phi$  da equação acima pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2.$$

Sugira soluções para esta equação, e mostre quais os valores que  $m$  pode assumir.

88. Faça a normalização das soluções do item anterior. Escreva explicitamente a solução para  $m = 0$ .

89. Faça o gráfico polar que mostra a simetria angular da amplitude da função de onda em relação a  $\phi$  para o caso  $m = 0$ . Explique a construção deste gráfico.

90. Faça o gráfico polar que mostra a simetria angular da amplitude da função de onda em relação a  $\phi$  para o caso  $m = 1$ . Explique a construção deste gráfico.

91. Faça o gráfico polar que mostra a simetria angular da amplitude da função de onda em relação a  $\phi$  para o caso  $m = 2$ . Explique a construção deste gráfico.

92. Do exercício 86 você deve ter deduzido que a dependência em  $\theta$  da equação de Schroedinger para o átomo de Hidrogênio decorre da solução da equação

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \beta^2 \sin^2 \theta = m^2.$$

A equação tem soluções para  $\beta = l(l+1)$ , sendo  $l$  e  $m$  inteiros positivos, com  $|m| \leq l$ . Mostre que uma função constante é uma solução desta equação, para um par (qual?) de valores de  $l$  e  $m$  específicos. Deduza qual deve ser o valor dessa constante, dado que  $\theta$  pode variar entre 0 e  $\pi$ . Lembre-se que o elemento de arco depende de  $\theta$  segundo  $\sin \theta$ .

93. A forma geral das soluções da parte angular da equação de Schroedinger para o átomo de Hidrogênio é

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \begin{cases} \left[ \frac{(2l+1)}{2\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) \cos(m\phi), & m > 0 \\ \left[ \frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta), & m = 0 \\ \left[ \frac{(2l+1)}{2\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) \sin(-m\phi), & m < 0 \end{cases}$$

onde  $l$  e  $m$  podem assumir os valores habituais. Escreva explicitamente as fórmulas de  $Y_0^0$ ,  $Y_1^0$ ,  $Y_1^1$  e  $Y_1^{-1}$ . Faça representações polares, no espaço, mostrando qual a simetria angular destas funções. Identifique cada uma das simetrias angulares com as notações que você conhece dos orbitais do átomo de Hidrogênio. Naturalmente, para resolver este exercício, você precisa procurar qual é a fórmula dos polinômios de Legendre correspondentes.

94. Usando a definição de  $\beta$  que decorre da solução da parte angular da equação de Schroedinger, a equação da parte radial é

$$\frac{-\hbar^2}{2m_e r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[ \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] R(r) = ER(r)$$

Mostre que funções da forma  $Ae^{-br}$  são soluções da equação acima, para um valor de energia  $E$  específico. Use  $l = 0$  e mostre qual o valor da constante  $b$ .

95. Normalize a função proposta acima e deduza o valor da constante  $A$ .

96. As energias,  $E$ , associadas às soluções da equação de Schroedinger para o átomo de Hidrogênio são dadas pela equação

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0 n^2}$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots$  e  $a_0 = \epsilon_0 \hbar^2 / (\pi m_e e^2)$ . Faça um diagrama qualitativo de níveis de energia. Discuta o significado físico do limite da energia quando  $n \rightarrow +\infty$ .

97. A fórmula geral das soluções da parte radial da equação de Schroedinger para o átomo de Hidrogênio é

$$R_{nl}(r) = - \left\{ \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3} \right\}^{1/2} \left( \frac{2}{na_0} \right)^{(l+\frac{3}{2})} r^l e^{-r/(na_0)} L_{n+l}^{2l+1} \left( \frac{2r}{na_0} \right),$$

onde  $L_i^j(x)$  são os polinômios de Laguerre. Sabendo que  $L_1^1(x) = -1$ , escreva a solução (completa), de menor energia, para o átomo de hidrogênio,  $\Psi(r, \theta, \phi)$ . Use os resultados que precisar dos exercícios anteriores.

98. Repita o exercício anterior e escreva as soluções às quais corresponde polinômio de Laguerre  $L_2^1(x) = -2!(2-x)$ .

99. Repita o exercício anterior e escreva as soluções às quais corresponde o polinômio de Laguerre  $L_3^3 = -3!$ .

100. Para todas as soluções que você escreveu acima, faça os gráficos, qualitativamente:

- Da dependência radial da amplitude da função de onda.
- Da dependência radial da densidade de probabilidade de encontrar o elétron em cada ponto do espaço.
- Da dependência radial da probabilidade de encontrar o elétron em um intervalo a uma distância determinada do núcleo.
- Faça gráficos polares da dependência angular destas funções.
- Faça gráficos qualitativos que representem a densidade de probabilidade em três dimensões.